

## CALCULUL DEPLASĂRILOR ELASTICE

## A. Lucrul mecanic. Energie potențială

Studiul structurilor de rezistență, alcătuite din bare, cuprinde atât determinarea eforturilor cât și determinarea deformațiilor elastice sub sarcină.

Deplasările ca și eforturile pe care le poate avea o structură sub sarcină sînt limitate de condițiile de rezistență și exploatare.

Calculul deplasărilor elastice este deosebit de important, deoarece constituie instrumentul principal în studiul sistemelor static nedeterminate.

Principiile care stau la baza metodelor de calcul al deplasărilor elastice sînt aceleași, indiferent de tipul structurii — static determinată sau static nedeterminată. Calculul deplasărilor elastice se poate face utilizînd principiul conservării energiei, sub forma condiției de lucru mecanic total nul sau principiul lucrului mecanic virtual. În această lucrare se adoptă prima variantă.

Prin lucrul mecanic total se înțelege lucrul mecanic efectuat de sarcinile exterioare și forțele de legătură interioare, parcurcînd deplasările produse de sistemul de sarcini. Această condiție se scrie:

$$L = L_e + L_i. \quad (\text{XIII.1})$$

În relație:

$L_e$  este lucrul mecanic al forțelor exterioare;

$L_i$  — lucrul mecanic al forțelor interioare.

Pentru sistemele conservative, lucrul mecanic total este nul, deoarece trecerea din poziția nedeformată în poziția deformată a structurii și invers se face fără pierdere de energie, deci:

$$L_e + L_i = 0. \quad (\text{XIII.2})$$

Trebuie observat că lucrul mecanic interior este negativ, intrucît deformarea se produce în sens invers sensului de acțiune al forțelor interioare,

iar lucrul mecanic exterior este pozitiv, deformarea structurii producându-se în sensul de acțiune al acestor forțe.

În general este convenabil să se înlocuiască lucrul mecanic interior cu energia potențială de deformare  $W$ , acumulată de corp în timpul deformării sale și care este dată de relația:

$$W = L_{ef} = -L_i, \quad (\text{XIII.3})$$

unde:

$L_{ef}$  este lucrul mecanic al eforturilor.

Astfel, relația (XIII.2) se scrie:

$$L_e = W \quad (\text{XIII.4})$$

și reprezintă forma generală utilizată în toate problemele privind calculul deplasărilor elastice și în calculul sistemelor static nedeterminate.

Expresia lucrului mecanic exterior  $L_e$  se stabilește pornind de la relația dintre forțe și deplasări (fig. XIII.1), și anume:

$$L_e = \int P \cdot du, \quad (\text{XIII.5})$$

unde  $\int P \cdot du$  reprezintă suprafața cuprinsă între dreapta  $oA$  și axa orizontală, adică  $\frac{1}{2} P_1 u_1$ :

$$L_e = \frac{1}{2} P_1 u_1. \quad (\text{XIII.5,a})$$

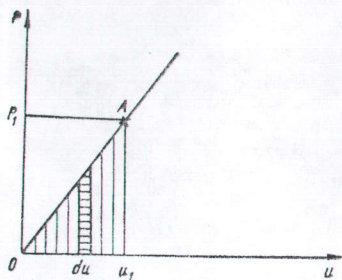


Fig. XII.1.

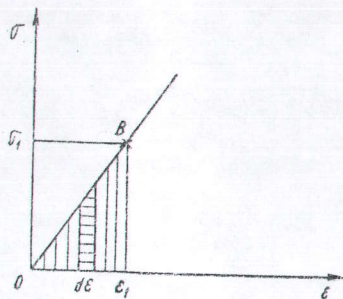


Fig. XIII.2.

În cazul general:

$$L = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i. \quad (\text{XIII.5, b})$$

În mod analog se poate scrie că energia potențială de deformare acumulată de corp este egală cu suprafața cuprinsă între curba caracteristică a materialului și axa orizontală:

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \epsilon \cdot dV, \quad (\text{XIII.6})$$

unde integrala este extinsă asupra întregului corp. Eforturile  $\sigma$  și deformațiile  $\epsilon$  cuprind aici eforturile și deformațiile pe toate cele trei direcții.

Pentru explicitarea relației (XIII.6) se consideră o structură plană alcătuită din bare, supusă acțiunii forțelor exterioare, din care se separă un element de volum  $dV = dx dy dz$ .

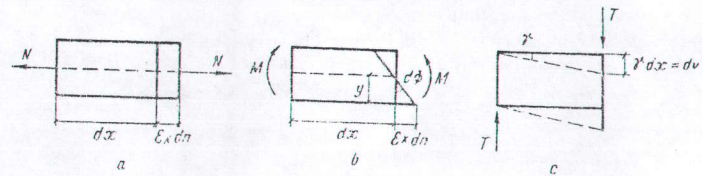


Fig. XIII.3.

Punând în evidență eforturile care acționează asupra elementului de volum și deformațiile produse de acestea (fig. XIII.3, a, b, c) se obține:

$$W_N = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \cdot \epsilon_x \cdot dx dy dz = \frac{1}{2} \int N \epsilon_x dx = \frac{1}{2} \int \frac{N^2 dx}{EA}$$

unde:  $\int dy dz = A$  (secțiunea transversală a barei),

$$\sigma_x \cdot A = N \text{ și } \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$$

$$W_M = \frac{1}{2} \int \sigma_x \cdot \epsilon_x \cdot dx dy dz = \frac{1}{2} \int M d\Phi = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI}$$

unde:  $d\Phi = \frac{\epsilon_x dx}{y} = \frac{M dx}{EI}$

$$W_T = \frac{1}{2} \int \tau_{yz} \gamma_{yz} dx dy dz = \frac{1}{2} \int T (dv)_m = \frac{1}{2} \int \frac{T^2 \chi dx}{GA}$$

unde:  $\gamma = \frac{T \cdot S}{bIG}$ ,  $(dv)_j = dv \frac{S dA}{bI}$  și  $\chi = \frac{1}{I^2} \int \frac{S^2 dA}{b^2}$ .

Coefficientul  $\chi$  are, de exemplu, valoarea  $\chi = 1,2$  pentru secțiuni dreptunghiulare,  $\chi = \frac{10}{9}$  pentru secțiuni circulare și  $\chi = \frac{32}{27}$  pentru secțiuni triunghiulare.

Valoarea totală a energiei potențiale de deformare devine:

$$W = W_M + W_N + W_T.$$

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI} + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 dx}{EA} + \frac{1}{2} \int \frac{\chi T^2 dx}{GA} \quad (\text{XIII.7})$$

Introducând în relația (XIII.4) se obține forma explicită:

$$\frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EI} + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 dx}{EA} + \frac{1}{2} \int \frac{\chi T^2 dx}{GA}. \quad (\text{XIII.8})$$

Relația (XIII.8) sub o formă foarte puțin schimbată se va folosi în calculul deplasărilor elastice.



## Reciprocitatea lucrului mecanic

Se presupune o structură acționată de două sisteme de forțe  $P_i$  și  $P_j$ , reprezentate, pentru ușurința urmăririi raționamentului, prin câte o singură forță (fig. XIII.4).

Sub acțiunea forțelor  $P_i$  și  $P_j$ , bara se deformează (fig. XIII.4, b), punctele de aplicație ale forțelor se deplasează pe verticală în  $i'$  și  $j'$ . Proiecțiile acestor deplasări pe direcția forțelor sînt  $\overline{i i'} = \Delta_i$  și  $\overline{j j'} = \Delta_j$ .

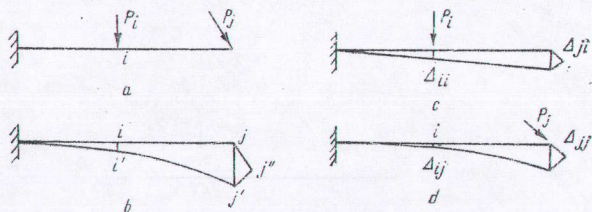


Fig. XIII.4.

În poziția deformată finală  $L_e = W$ .

Se încarcă bara cu cele două forțe în ordinea următoare: întâi se aplică forța  $P_i$  și după aceea forța  $P_j$ . Sub acțiunea forței  $P_i$  bara se deformează și acumulează o cantitate de energie potențială, notată cu  $W_{ii}$ .

Încărcînd cu  $P_j$ , bara se deformează în continuare, forțele exterioare  $P_i$  și  $P_j$  produc lucru mecanic, iar bara acumulează energia potențială  $W_{ij} + W_{jj}$ . Aici,  $W_{ij}$  este lucrul mecanic al eforturilor produse de încărcarea barei cu forța  $P_i$ , parcurgînd deformațiile produse de încărcarea barei cu forța  $P_j$ .

Energia potențială totală în prima ipoteză de încărcare este:

$$W_I = W_{ii} + W_{ij} + W_{jj}. \quad (\text{XIII.9})$$

Inversînd ordinea de încărcare se obține:

— din încărcarea structurii cu forța  $P_j$  energia potențială  $W_{jj}$ ;

— din încărcarea ulterioară cu forța  $P_i$  energia potențială  $W_{ji} + W_{ii}$ .

Energia potențială totală în ipoteza a doua de încărcare este:

$$W_{II} = W_{jj} + W_{ji} + W_{ii}. \quad (\text{XIII.10})$$

Energia potențială totală acumulată de corp este aceeași, indiferent de ordinea în care sînt aplicate sarcinile, așa încît  $W_I = W_{II} = W$ , sau:

$$W_{ii} + W_{ij} + W_{jj} = W_{jj} + W_{ji} + W_{ii}, \quad (\text{XIII.11})$$

de unde rezultă:

$$W_{ij} = W_{ji}. \quad (\text{XIII.12})$$

Înlocuind cu lucrul mecanic al forțelor exterioare relația (XIII.12) se scrie:

$$L_{ij} = L_{ji}. \quad (\text{XIII.13})$$

Relația (XIII.13), cunoscută sub numele de teorema reciprocității lucrului mecanic, a fost stabilită de Betti. Această teoremă se enunță astfel: „lucrul mecanic efectuat de sistemul de forțe  $i$  parcurgînd deplasările produse de sistemul de forțe  $j$  este egal cu lucrul mecanic efectuat de sistemul de forțe  $j$  parcurgînd deplasările produse de sistemul de forțe  $i$ ”.

Relația (XIII.13) se mai poate scrie:

$$P_i \Delta_{ij} = P_j \Delta_{ji} \quad (\text{XIII.13}')$$

sau:

$$\frac{\Delta_{ij}}{P_j} = \frac{\Delta_{ji}}{P_i}. \quad (\text{XIII.13}'' )$$

Notînd  $\frac{\Delta_{ij}}{P_j} = \delta_{ij}$  și  $\frac{\Delta_{ji}}{P_i} = \delta_{ji}$ , se obține relația:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (\text{XIII.14})$$

care reprezintă teorema reciprocității deplasărilor unitare și care a fost stabilită de Maxwell. Deplasarea  $\delta_{ij}$  este deplasarea produsă pe direcția  $i$  de o forță egală cu unitatea acționînd pe direcția  $j$ .

Teorema reciprocității deplasărilor unitare se enunță astfel: „deplasarea pe direcția  $i$  produsă de o forță egală cu unitatea acționînd pe direcția  $j$ , este egală cu deplasarea pe direcția  $j$  produsă de o forță egală cu unitatea acționînd pe direcția  $i$ ”.

În mod asemănător se poate stabili reciprocitatea reacțiunilor unitare:

$$r_{ij} = r_{ji} \quad (\text{XIII.15})$$

și reciprocitatea deplasărilor și reacțiunilor unitare:

$$\delta_{ij} = -r_{jiP}. \quad (\text{XIII.16})$$

Teorema reciprocității reacțiunilor unitare se enunță astfel: „reacțiunea pe direcția legăturii  $i$  produsă de o deplasare egală cu unitatea pe direcția legăturii  $j$  este egală cu reacțiunea pe direcția legăturii  $j$  produsă de o deplasare egală cu unitatea pe direcția legăturii  $i$ ”.

## B. Calculul deplasărilor elastice. Formula Maxwell-Mohr

Pentru calculul deplasărilor elastice punctuale pe diferite direcții se va considera o structură în două situații de încărcare:

— un sistem de forțe  $P_i$  redus la o singură forță egală cu unitatea  $P_i = 1$ ;

— un sistem de forțe  $P_j$ .

Forța  $P_i = 1$  produce în structură eforturile  $m_i$ ,  $n_i$ ,  $l_i$  și deformațiile  $d\Phi$ ,  $du$  și  $(dv)_m$ .

Sistemul de forțe  $P_j$  produce în structură eforturile  $M_j$ ,  $N_j$ ,  $T_j$  și deplasarea  $\Delta_i$  pe direcția sarcinii unitate  $P_i$ .

Scriînd egalitatea lucrului mecanic exterior cu energia de deformație și fiind seama de relația (XIII.8) se obține formula Maxwell-Mohr pentru calculul deplasării elastice pe o direcție oarecare  $i$ :



$$1 \cdot \Delta_i = \int \frac{m_i M_j}{EI} dx + \int \frac{n_i N_j}{EA} dx + \int \frac{\chi_i T_j}{GA} dx. \quad (\text{XVIII.17})$$

Sub această formă, relația (XIII.17) se utilizează în calculul deplasărilor elastice ale sistemelor static determinate și static nedeterminate, întrucât la stabilirea ei nu s-a făcut nici o ipoteză asupra sistemului static, ci s-a studiat un element de volum al unei bare oarecare.

Pentru sistemele static determinate supuse acțiunii variației de temperatură expresia (XIII.17) se completează în membrul din dreapta cu termenii:

$$\int n_i \alpha t_m dx + \int m_i \alpha \frac{\Delta t}{h} dx, \quad (\text{XIII.18})$$

care reprezintă lucrul mecanic al eforturilor din încărcarea cu  $P=i$ , parcurgând deplasările produse de sarcina exterioară (variația de temperatură).

În relația (XIII.18),  $\alpha$  este coeficientul de dilatare termică liniară,  $t_m$  este temperatura în axa barei,  $\Delta t$  — diferența de temperatură între fibrele extreme, superioară și inferioară, iar  $h$  — înălțimea secțiunii:

$$t_m = \frac{t_2 + t_1}{2}, \quad \Delta t = t_2 - t_1, \quad \text{unde } t_2 > t_1.$$

Cînd sistemul static determinat are și cedări de reazeme deplasarea pe o direcție oarecare  $i$  trebuie completată cu termenul  $\sum r_{ki} \Delta_k$ , unde  $r_{ki}$  sînt reacțiunile din reazemele  $k$  din încărcarea cu  $P_i=1$ , iar  $\Delta_k$  cedările reale ale reazemelor  $k$ . Termenul  $\sum r_{ki} \Delta_k$  reprezintă lucrul mecanic exterior și se include în membrul stîng al relației (XIII.17).

În cazul general al solicitării cu forțe, variație de temperatură și cedări de reazeme formula Maxwell-Mohr este:

$$\sum r_{ki} \Delta_k + 1 \cdot \Delta_i = \int \frac{m_i M_j}{EI} dx + \int \frac{n_i N_j}{EA} dx + \int \frac{\chi_i T_j}{GA} dx + \int n_i \alpha t_m dx + \int m_i \alpha \frac{\Delta t}{h} dx. \quad (\text{XIII.19})$$

Trebuie remarcat faptul că nu toți termenii relației (XIII.17) au aceeași pondere în calculul deplasărilor elastice, ci în funcție de tipul de structură studiat aportul unora este neglijabil din punct de vedere practic sau este nul.

Astfel, în cazul structurilor la care efectul predominant este încovoierea, este suficient să se ia în considerație numai termenul  $\int \frac{m_i M_j}{EI} dx$ , pentru grin-

zile cu zăbrele numai termenul al doilea  $\int \frac{n_i N_j}{EA} dx$  este diferit de zero, iar la structurile care au în alcătuirea lor tiranți trebuie luați primii doi termeni.

Aplicarea sub această formă a formulei Maxwell-Mohr necesită un consum mare de timp, pentru scrierea și rezolvarea unui mare număr de integrale simple.

Pornind de la observația că din încărcarea structurilor static determinate cu sarcina  $P_i=1$  diagramele de eforturi sînt liniare (cu excepția arcelor), și că numai din sarcinile exterioare diagramele pot fi curbe de ordinul 2 sau 3, Vereșciaghin a demonstrat că: „rezultatul integrării a două diagrame, dintre

Valorile  $\int m_i M_j dx$ 

Tabelul XIII.1

$M_j$	$m_i$			
	$alc$	$\frac{1}{2} alc$	$\frac{1}{2} cl(a+b)$	
	$\frac{1}{2} alc$	$\frac{1}{3} alc$	$\frac{1}{6} lc(b+2a)$	
	$\frac{1}{2} aid$	$\frac{1}{6} ald$	$\frac{1}{6} ld(2b+a)$	
	$\frac{1}{2} al(2c+d)$	$\frac{1}{6} al(2c+d)$	$\frac{1}{6} [c(2a+b)+d(2b+a)]$	
	$\frac{1}{2} al(c+d)$	$\frac{1}{6} al(2d+c)$	$\frac{1}{6} lc(2b+a)+d(2a+b)$	
	$\frac{2}{3} cla$	$\frac{1}{3} cla$	$\frac{1}{3} cl(a+b)$	
	$\frac{1}{3} cl a$	$\frac{1}{4} cl a$	$\frac{1}{12} cl(3a+b)$	
	$\frac{1}{3} d l a$	$\frac{1}{12} d l a$	$\frac{1}{12} dl(a+3b)$	
	$\frac{2}{3} cla$	$\frac{14}{45} cl a$	$\frac{2}{45} cl(7a+8b)$	
	$\frac{1}{4} cl a$	$\frac{1}{5} cl a$	$\frac{1}{20} cl(4a+b)$	
	$\frac{1}{4} d l a$	$\frac{1}{20} d l a$	$\frac{1}{20} dl(a+4b)$	

\* — parabolă de gradul II

\*) Această relație este valabilă la bare cu secțiuni transversale simetrice.



care cel puțin una trebuie să fie liniară, este egal cu produsul dintre suprafața diagramei neliniare I și ordonata din diagrama de variație liniară II luate în dreptul centrului de greutate al primei diagramei”.

Demonstrația pe baza căreia s-a enunțat regula lui Vereșceaghin este dată în toate cursurile de statică și rezistență.

În cazul în care ambele diagrame sînt liniare, rezultatul integrării este același, indiferent de ordinea în care se consideră diagramele.

În tabelul XIII.1 sînt date rezultatele integrării diferitelor diagrame.

Atenție deosebită trebuie dată semnului rezultatului integrării prin oricare dintre metode. Se consideră semnul plus cînd eforturile din ambele solicitări tensionează aceeași fibră a barelor sau sînt de același semn (întindere sau compresiune).

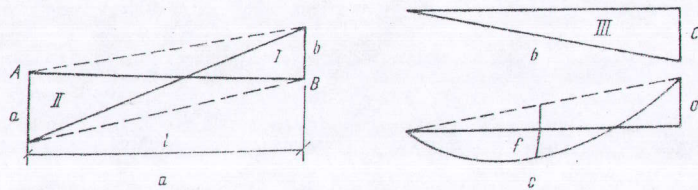


Fig. XIII.5.

Pentru diagrame compuse este avantajos ca integrarea să se facă descompunînd diagrama rezultată în diagrame simple. Cîteva exemple de astfel de diagrame sînt date în figura XIII.5.

Integrarea diagramei a cu ea însăși se face după regula  $(I-II)^2$ , adică

$$\frac{a^2 l}{3} - \frac{abl}{3} + \frac{b^2 l}{3}.$$

Integrarea diagramei a și b se face astfel:  $II \cdot III - I \cdot III$ , avînd ca rezultat:

$$\frac{alc}{6} - \frac{bcl}{3}.$$

Integrarea diagramei b și c se face astfel: triunghi cu triunghi cu semnul minus și triunghi cu parabolă cu semnul plus, rezultatul fiind:

$$\frac{fcl}{3} - \frac{dcl}{3}.$$

Dacă diagrama din figura XIII.5, b are baza în capătul din stînga, rezultatul integrării este:

$$\frac{fcl}{3} - \frac{dcl}{6}.$$

Integrarea diagramei a și c se efectuează ca în cazul precedent și are ca rezultat:

$$fl\left(\frac{a-b}{3}\right) + dl\left(\frac{2b-a}{6}\right).$$

În același mod se procedează pentru orice altă situație întîlnită în rezolvarea sistemelor de bare.

La arcele la care curba de presiune este depărtată de forma arcului, deplasările elastice se determină cu relația (XIII.19), reținînd numai integrala momentelor. Un calcul exact trebuie efectuat așa cum se va arăta în continuare.

Influența forței tăietoare — neglijabilă în calculul practic — se determină utilizînd același termen ca la barele drepte.

Efectul forței axiale și a momentului încovoietor apare diferit, întrucît deformația du pe direcția N este dată în acest caz atît de N cît și de M, iar rotirea  $\Delta(d\Phi)$  este dată și de M și N.

Expresiile deformațiilor în cazul general sînt:

$$du = \left( \frac{N}{EA} - \frac{M}{EA\rho} \right) ds$$

$$\Delta(d\Phi) = \left( \frac{M}{EI} - \frac{N}{EA\rho} \right) ds. \quad (\text{XIII.20})$$

Scriînd egalitatea lucrului mecanic exterior cu lucrul mecanic interior, rezultă:

$$1 \cdot \Delta_i = \frac{m_i M_j}{EI} ds - \int \frac{n_i N_j}{EA\rho} ds + \int \frac{n_i N_j}{EA} ds - \int \frac{n_i M_j}{EA\rho} ds. \quad (\text{XIII.21})$$

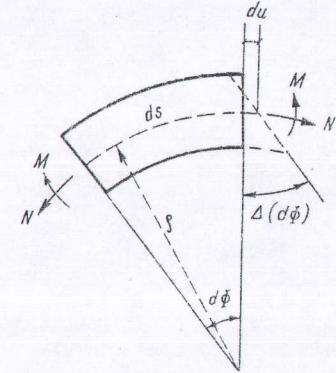


Fig. XIII.6.

Deplasarea  $\Delta_i$  se obține efectuînd direct integralele, deoarece metoda Vereșceaghin nu se aplică în aceste cazuri.

Calculul practic al deplasărilor elastice se conduce în modul următor:

a) *Sisteme de bare încărcate cu sarcini exterioare, forțe și momente.*

Se trasează diagramele de eforturi  $M_j$ ,  $N_j$  și  $T_j$  datorită sistemului de forțe dat. Se încarcă structura cu o sarcină unitate (forță sau moment), acționînd pe direcția deplasării ce urmează să fie determinată și se trasează diagramele  $m_i$ ,  $n_i$  și  $t_i$  denumite diagrame unitare.

Efectuînd integralele de tipul celor din formula lui Mohr (integrînd direct sau prin metoda Vereșceaghin) și sumînd se obține deplasarea căutată. Se va da atenție unităților de măsură prin care se exprimă elementele ce se introduc în calcul.

Deplasarea elastică pentru diferitele tipuri de structuri este:

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_j}{EA} dx \quad \text{— cadre fără tiranți}$$

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_j}{EI} dx + \int \frac{n_i N_j}{EA} dx \quad \text{— cadre cu tiranți. Termenul al doilea se calculează numai pentru tirant.}$$

$$\Delta_i = \sum_1^n \frac{n_i N_j}{EA} l_{km} \quad \text{— grinzi cu zăbrele.}$$



Obișnuit se vor trasa numai diagramele de eforturi care intră în relațiile de mai sus.

b) *Sisteme de bare încărcate cu solicitări exterioare, variații de temperatură.*

Pentru fiecare bară se stabilește temperatura  $t_m$  din axa barei și diferența de temperatură  $\Delta t$  între fețele barelor.

În continuare se trasează diagramele unitare și se calculează deplasarea  $\Delta_i$  cu relația:

$$\Delta_i = \int n_i \sigma t_m dx + \int n_i \alpha \frac{\Delta t}{h} dx \text{ pentru cadre și arce}$$

și

$$\Delta_i = \int n_i \alpha t_m dx \text{ pentru grinzi cu zăbrele.}$$

c) *Sisteme de bare încărcate cu solicitări exterioare, cedări de reazeme.*

Cedările de reazeme  $\Delta_k$  sînt cunoscute. Se încarcă structura cu sarcina unitate pe direcția  $i$  și se determină reacțiunile  $r_{ki}$ . Deplasarea pe direcția  $i$  este:

$$\Delta_i = -\sum r_{ki} \Delta_k.$$

Dacă interesează deplasările mai multor puncte pentru o aceeași încărcare exterioară, atunci se schimbă numai punctul de aplicație al sarcinii unitare și deci diagramele  $m_i$ ,  $l_i$ ,  $n_i$  și reacțiunile  $r_{ki}$ .

Efectul sarcinilor exterioare ( $M_j$ ,  $N_j$ ,  $T_j$ ,  $t_m$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta_k$ ) se stabilește o singură dată, oricare ar fi deplasarea căutată.

Dacă se urmărește determinarea unei aceeași deplasări pentru diferite tipuri de solicitări aplicate structurii, atunci diagramele  $m_i$ ,  $n_i$ , și  $l_i$  rămîn neschimbate, se schimbă numai diagramele de eforturi  $M_j$ ,  $N_j$  și  $T_j$ .

*Observație.* La sistemele static determinate, variația de temperatură și cedările de reazeme nu produc eforturi interioare, ci numai o modificare a configurației structurii.

## APLICAȚII

**Problema XIII.1.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{uB}$ ,  $\Delta_{vC}$  și  $\theta_C$  la structura din figura XIII.7.

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_j}{EI} dx.$$

Momentul de inerție este constant și egal cu  $I$ , bara este din același material, deci  $EI = \text{ct.}$

Aplicînd metoda Vereșceaghin de integrare a diagramelor se obține:

$$\Delta_{uB} = \frac{1}{EI} 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} 6 = \frac{108}{EI}$$

$$\Delta_{vC} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 3 + 6 \cdot 6 \cdot 3 \right) = \frac{126}{EI}$$

$$\theta_C = -\frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 + 6 \cdot 6 \cdot 1 \right) = -\frac{45}{EI}.$$

Deplasările  $\Delta_{uB}$  și  $\Delta_{vC}$  au rezultat cu semnul plus, deci se produc în sensul de acțiune al sarcinii unitare.

Rotirea  $\theta_C$  a rezultat cu semnul minus, deci în realitatea ea este de sens invers sensului de rotire al momentului unitar introdus în C.

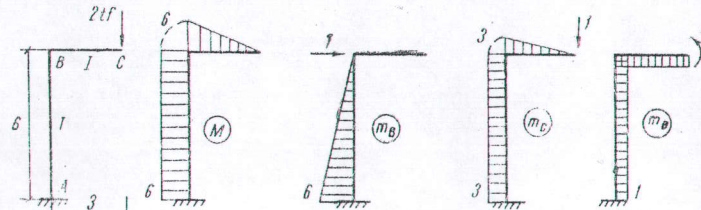


Fig. XIII.7.

Fiind date dimensiunile secțiunii transversale a barei și materialul din care este executată, se pot stabili mărimile reale ale deplasărilor elastice. Aici,  $\Delta_{uB}$  și  $\Delta_{vC}$  vor rezulta în metri, iar  $\theta_C$  în radiani.

**Problema XIII.2.** Să se determine deplasările elastice indicate la aplicația XIII.1, prin integrarea directă a diagramelor de moment.

Expresia deplasării este  $\Delta_i = \int \frac{m_i M_j}{EI} dx$ . Deplasarea fiind dată de o sumă de integrale de forma celei de sus.

Se scrie expresia momentului pe fiecare bară ( $m_i$  și  $M_j$ ) și se efectuează integralele:

$$M_{AB} = 6; \quad M_{BC} = 6 - 2x.$$

Deplasarea  $\Delta_{uB}$ :

$$m_{AB} = 6 - x; \quad m_{BC} = 0$$

$$\Delta_{uB} = \frac{1}{EI} \int_0^6 (6-x)6 dx = \frac{1}{EI} \left[ 36x - 6 \frac{x^2}{2} \right]_0^6 = \frac{1}{EI} (216 - 108) = \frac{108}{EI}.$$

Deplasarea  $\Delta_{vC}$ :

$$m_{AB} = 3; \quad m_{BC} = 3 - x$$

$$\begin{aligned} \Delta_{vC} &= \frac{1}{EI} \int_0^6 3 \cdot 6 dx + \frac{1}{EI} \int_0^3 (3-x)(6-2x) dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ 18x \right]_0^6 + \frac{1}{EI} \left[ 18x - 12 \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{3} \right]_0^3 \end{aligned}$$

$$\Delta_{vC} = \frac{126}{EI}.$$



Rotirea  $\theta_c$ :

$$m_{AB}=1; \quad m_{BC}=1$$

$$\theta_c = -\frac{1}{EI} \int_0^l 1 \cdot 6 \cdot dx - \frac{1}{EI} \int_0^l 1(6-2x)dx = -\frac{1}{EI} \left[ 6x \Big|_0^l - \frac{1}{EI} \left[ 6x - 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^l \right] \right]$$

$$\theta_c = -\frac{45}{EI}$$

S-au obținut aceleași rezultate ca și în aplicația XIII.1.

**Problema XIII.3.** Să se determine rotirile  $\theta_A$  și  $\theta_B$  la grinda simplu rezemată din figura XIII.8, solicitată de momentele încovoietoare  $M_A$  și  $M_B$  acționând astfel:

- numai  $M_A$ ;
- numai  $M_B$ ;
- $M_A$  și  $M_B$  acționând concomitent ( $M_A \neq M_B$ ,  $M_A = -M_B$ ,  $M_A = M_B$ ).

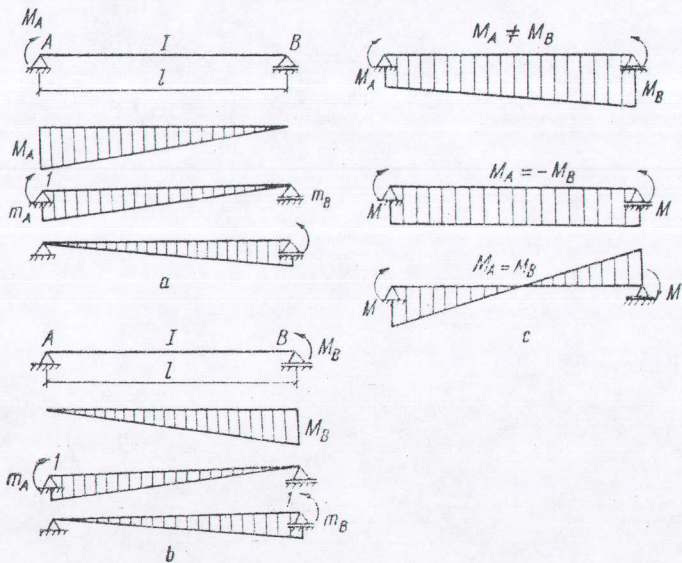


Fig. XIII.8.

Rezolvare:

$$a) \theta_A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} l M_A \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{M_A \cdot l}{3EI} \quad \theta_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} l M_A \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{M_A \cdot l}{6EI}$$

$$b) \theta_A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} l M_B \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{M_B \cdot l}{6EI} \quad \theta_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} l M_B \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{M_B \cdot l}{3EI}$$

$$c) \theta_A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \left( \frac{2}{3} M_A + \frac{1}{3} M_B \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{M_A \cdot l}{3} + \frac{M_B \cdot l}{6} \right) \quad \theta_B = \frac{1}{EI} \left( \frac{M_A \cdot l}{6} + \frac{M_B \cdot l}{3} \right)$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot M = \frac{M \cdot l}{2EI}$$

$$\theta_A = \theta_B = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} M - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{1}{3} M \right) \quad \theta_A = \theta_B = \frac{M \cdot l}{6EI}$$

Diagramele unitare rămân aceleași, se schimbă numai diagramele  $M$  în funcție de combinația de încărcări introdusă pe grindă.

În calculele efectuate au interesat valoarea rotirii și sensul în care se produce (în sensul de acțiune al momentului unitar sau în sens invers).

**Problema XIII.4.** Să se determine deplasările elastice  $\theta_A$ ,  $\Delta_{vc}$  și  $\theta_B$  la grinda cu consolă din figura XIII.9.

$$\theta_A = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = -\frac{10}{EI}$$

$$\Delta_{vc} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = \frac{48}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{20}{EI}$$

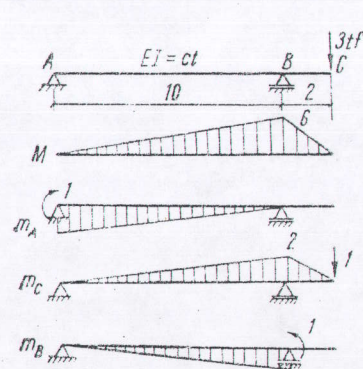


Fig. XIII.9.

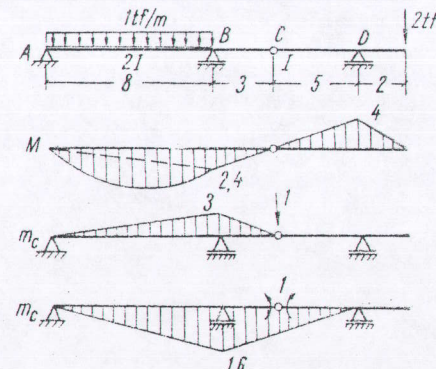


Fig. XIII.10.

**Problema XIII.5.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{vc}$  și  $\theta_c$  la grinda Gerber din figura XIII.10.

$$\Delta_{vc} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 - \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 8^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right)$$

$$\Delta_{vc} = -\frac{48,8}{EI}$$



$$\theta_c = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2,4 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0,6\right) + \frac{1}{2EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,6\right)$$

$$\theta_c = \frac{71,68}{3EI}$$

**Problema XIII.6.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{vD}$  și  $\theta_B$  la structura din figura XIII.11.

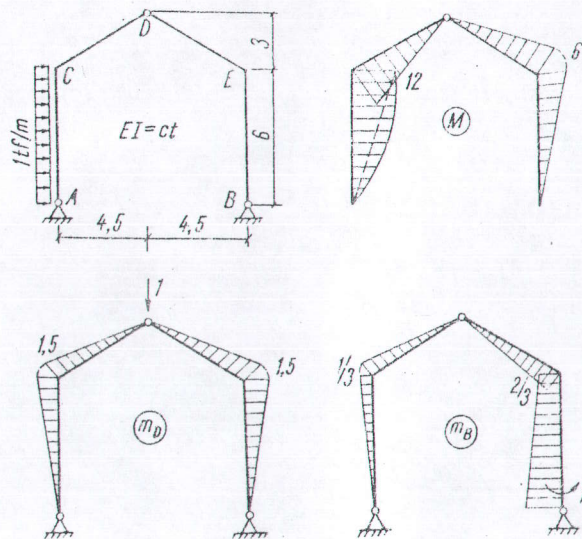


Fig. XIII.11.

$$\Delta_{vD} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \right)$$

$$\Delta_{vD} = -\frac{47,70}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left( -\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{7}{9} \right)$$

$$\theta_B = \frac{-39,40}{EI}$$

Ambele deplasări se produc în sens invers celui de acțiune al sarcinilor unitare introduse pe direcția deplasărilor căutate.

**Problema XIII.7.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{vD}$  și  $\theta_F$  la structura din figura XIII.12.

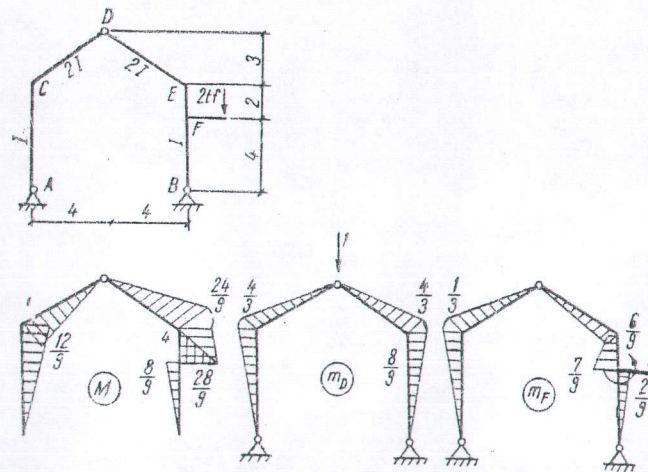


Fig. XIII.12.

$$\Delta_{vD} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{9} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{9} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{9} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{24}{9} \cdot 2 \cdot \frac{10}{9} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot \frac{28}{27} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9}$$

$$\Delta_{vD} = \frac{88}{27EI}$$

$$\theta_F = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{9} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{9} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} -$$

$$-\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{9} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{9} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{24}{9} \cdot 2 \cdot \frac{13}{18} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot 2 \cdot \frac{20}{27} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9}$$

$$\theta_F = -\frac{194}{27EI}$$



**Problema XIII.8.** Să se determine rotirea relativă  $\theta_c^{rel}$ , deplasarea relativă pe orizontală a punctelor  $A$  și  $B$ ,  $\Delta_{uAB}$  și  $\Delta_{uc}$  la structura din figura XIII.13.

$$\theta_c^{rel} = \frac{1}{EI} \left( -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{896}{27EI}$$

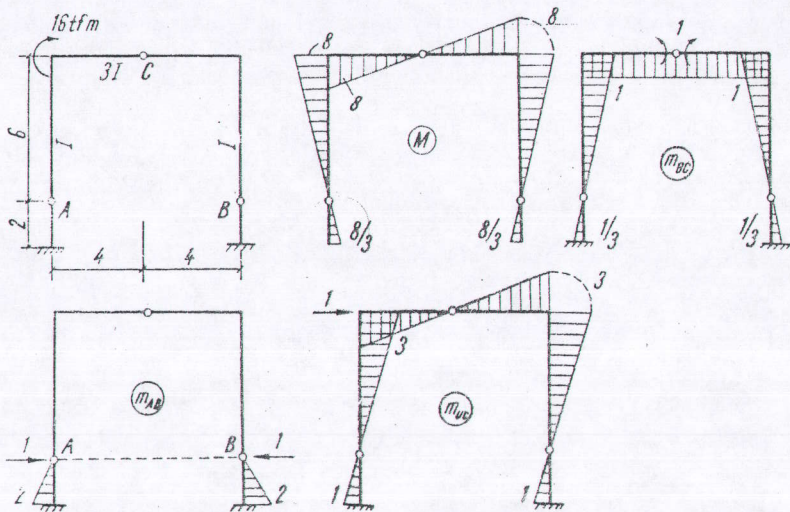


Fig. XIII.13.

În calculul rotirii  $\theta_c^{rel}$  trebuie observat că nu s-a mai introdus rezultatul integrării diagramelor de pe rigla orizontală, deoarece valoarea obținută pe jumătate din stînga este egală și de semn contrar cu valoarea obținută pe jumătatea din dreapta, iar suma lor este egală cu zero.

De asemenea, trebuie observat că diagramele de momente fiind egale pe stîlpi, iar momentele de inerție de asemenea egale, fiecare termen s-a luat de 2 ori.

Pentru calculul deplasării relative pe orizontală a punctelor  $A$  și  $B$  se introduce o pereche de forțe unitare pe direcția  $AB$ .

$$\Delta_{uAB} = -\frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3}$$

$$\Delta_{uAB} = -\frac{64}{9EI}$$

$$\Delta_{uc} = \frac{2}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{64}{3EI}$$

Se observă și în calculul deplasării  $\Delta_{uc}$  că rezultatul integrării diagramelor de pe stîlpi este egal cu zero.

**Problema XIII.9.** Să se determine deplasarea relativă a punctelor  $A$  și  $B$ ,  $\Delta_{uAB}$  și deplasarea totală a punctului  $C$ ,  $\Delta_c$  la structura din figura XIII.14.

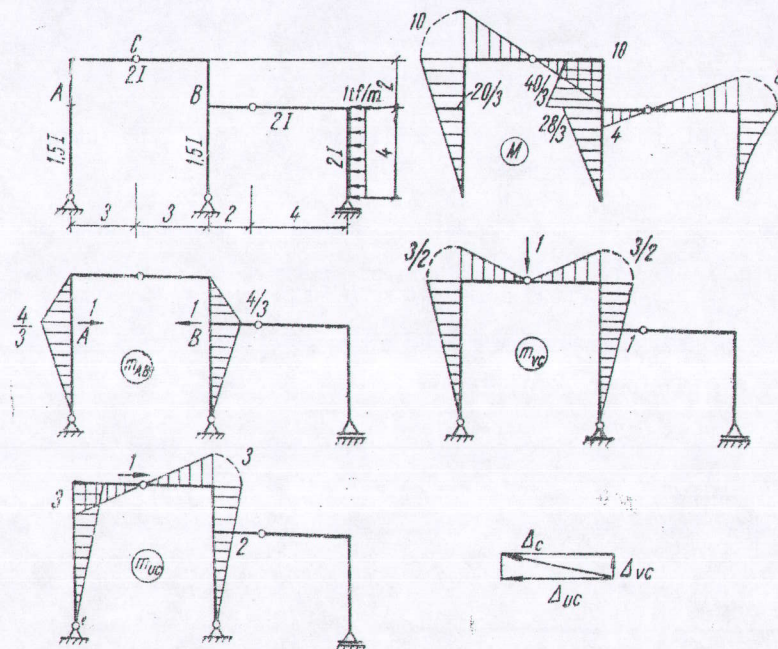


Fig. XIII.14.

$$\Delta_{uAB} = \frac{1}{1,5EI} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{70}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot 2 \cdot \frac{110}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{28}{3} \right)$$

$$\Delta_{uAB} = -\frac{64}{9EI}$$

Deplasarea totală a punctului  $C$  se obține cu relația:

$$\Delta_c = \sqrt{\Delta_{uc}^2 + \Delta_{vc}^2}$$

$$\Delta_{vc} = \frac{1}{1,5EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 - 1 \cdot 2 \cdot \frac{35}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{9} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{28}{3} \right)$$

$$\Delta_{vc} = -\frac{68}{9EI}$$



$$\Delta_{uc} = \frac{1}{1,5 EI} \left( -\frac{1}{2} 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 10 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{35}{3} - \frac{1}{2} 2 \cdot 1 \cdot \frac{100}{9} - \frac{1}{2} 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \frac{28}{3} \right) - \frac{1}{2 EI} 2 \cdot \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 10$$

$$\Delta_{uc} = -\frac{1126}{9 EI}$$

$$\Delta_c = \sqrt{\left(\frac{68}{9 EI}\right)^2 + \left(\frac{1126}{9 EI}\right)^2} = \frac{1128}{9 EI}$$

**Problema XIII.10.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{uB}$  și  $\theta_C^{rel}$  la structura cu tirant din figura XIII.15 ( $\frac{I}{A} = \frac{1}{10}$ ).

Diagramele  $n$  și  $N$  nu s-au trasat pe întreaga structură, ci numai pe tirant.

$$\Delta_{uB} = \frac{1}{EI} \left( 2 \cdot \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot \frac{1}{2} 3 \cdot 3 \cdot \frac{22}{3} \right) + \frac{1}{EA} 2 \cdot 8 \cdot \frac{14}{3}$$

$$\Delta_{uB} = \frac{1}{EI} (81 + 66 + 7,46) \quad \Delta_{uB} = \frac{154,46}{EI}$$

$$\theta_{Cl}^{re} = -\frac{2}{EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{17}{3} - \frac{2}{2EI} 1 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{EA} \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{14}{3}$$

$$\theta_C^{rel} = -\frac{23,75}{EI}$$

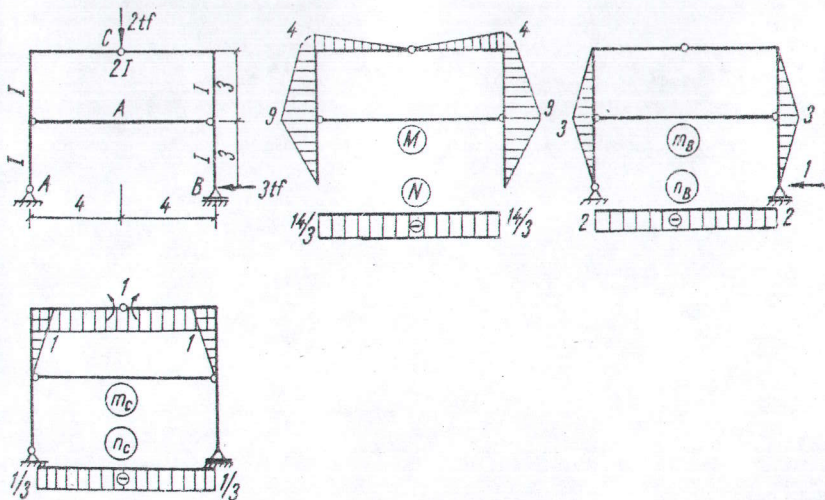


Fig. XIII.15.

**Problema XIII.11.** Să se determine deplasările elastice  $\theta_C^{rel}$ ,  $\Delta_{vC}$  și  $\Delta_{uc}$  la structura simetrică încărcată simetric, ca în figura XIII.16.

Sistemul fiind simetric și încărcat simetric, diagrama  $M$  rezultă simetrică. Încărcarea cu sarcina (sau sarcinile) unitate poate fi simetrică sau antisimetrică, iar diagramele unitare de eforturi vor respecta condiția de simetrie sau antisimetrie.

Se observă că ținând seama de simetrie, în cazul unei diagrame unitare simetrică, rezultatul integrării este diferit de zero, iar calculul se poate efectua numai pe jumătate din structură, multiplicând fiecare termen sau rezultatul final cu 2.

În cazul unei diagrame unitare antisimetrică, rezultatul integrării este egal cu zero. Deci, integrarea unei diagrame de efort simetrică cu o diagramă antisimetrică ducă la rezultat nul. Această remarcă este de mare importanță în studiul sistemelor simetrice static nedeterminate.

$$\theta_C^{rel} = \frac{2}{EI} \frac{2}{3} 4,5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} 1 + \frac{2}{EI} \frac{1}{2} 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{3} + \frac{2}{EI} \frac{1}{3} 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{3}$$

$$\theta_C^{rel} = \frac{64}{3 EI}$$

$$\Delta_{vC} = -\frac{2}{EI} \frac{2}{3} 4,5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} 2 - \frac{2}{EI} \frac{1}{2} 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \frac{2}{3} - \frac{2}{EI} \frac{1}{3} 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \frac{2}{3}$$

$$\Delta_{vC} = -\frac{128}{3 EI}$$

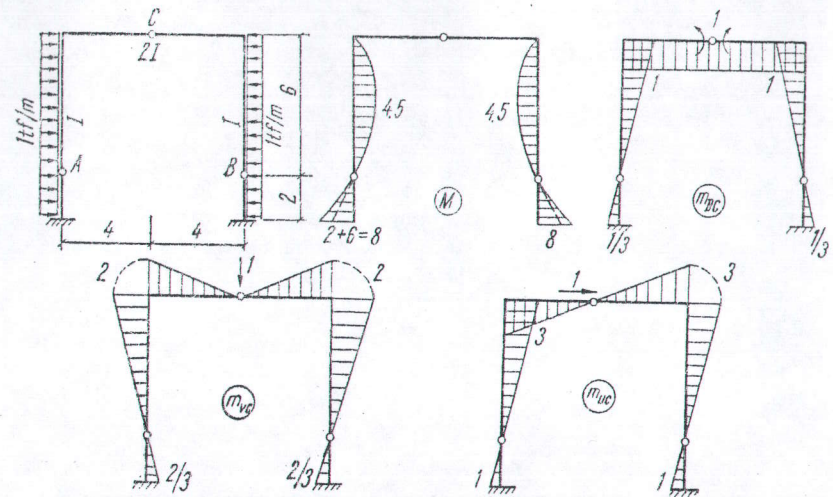


Fig. XIII.16.



$$\Delta_{u_C} = \frac{2}{EI} \left( \frac{2}{3} 4,5 \cdot 6 \frac{1}{2} 3 - \frac{2}{3} 4,5 \cdot 6 \frac{1}{2} 3 + \frac{1}{2} 6 \cdot 2 \frac{2}{3} 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{3} 2 \cdot 2 \frac{3}{4} 1 - \frac{1}{3} 2 \cdot 2 \frac{3}{4} 1 \right).$$

$\Delta_{u_C} = 0$ . Termenii din paranteză sînt doi cîte doi egali și de semn contrar.  $\theta_C$  și  $\Delta_{v_C}$  sînt deplasări simetrice și sînt diferite de zero.

$\Delta_{u_C}$  este deplasare antisimetrică și este egală cu zero.

La sistemele simetrice, încărcate simetric, deplasările antisimetrice sînt egale cu zero.

La sistemele simetrice, încărcate antisimetric, deplasările simetrice sînt egale cu zero.

**Problema XIII.12.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{u_D}$ ,  $\theta_C^{rel}$  și  $\Delta_{v_C}$  la structura simetrică din figura XIII.17.

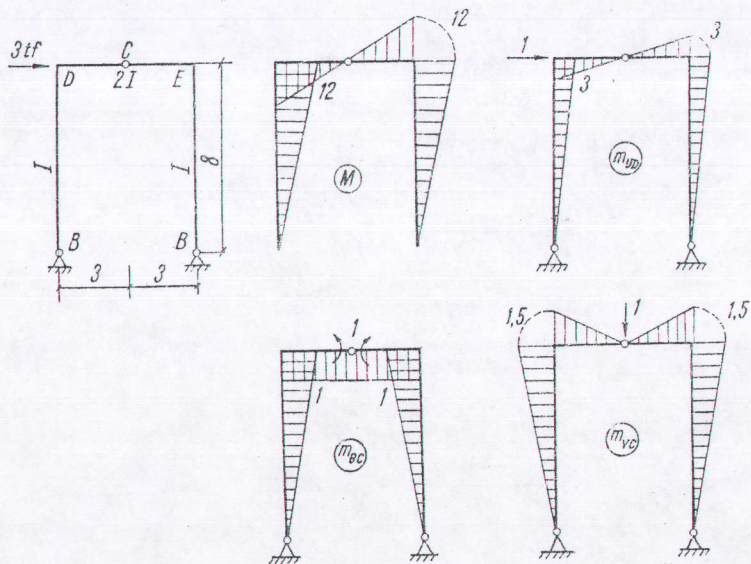


Fig. XIII.17.

Se observă că diagramele  $M$  și  $m_{u_D}$  sînt antisimetrice, deci din integrarea lor va rezulta deplasarea  $\Delta_{u_D} \neq 0$ .

Diagramele  $m_{0_C}$  și  $m_{v_C}$  sînt diagrame simetrice, iar diagrama  $M$  antisimetrică. Integrarea unei diagrame simetrice cu o diagramă antisimetrică este egală cu zero, deci  $\theta_C^{rel} = \Delta_{v_C} = 0$ .

$$\Delta_{u_D} = \frac{2}{EI} \frac{1}{2} 8 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} 3 + \frac{2}{2EI} \frac{1}{2} 3 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3} 3$$

$$\Delta_{u_D} = \frac{228}{EI}$$

**Problema XIII.13.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{u_{AA'}}$  și  $\Delta_{v_B}$  la structura simetrică din figura XIII.18.

$$\Delta_{u_{AA'}} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{3} + \frac{2}{1,5EI} \cdot \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 4$$

$$\Delta_{u_{AA'}} = \frac{64}{EI}$$

$$\Delta_{v_B} = -\frac{2}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{7}{6} - \frac{2}{1,5EI} \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} 1,$$

$$\Delta_{v_B} = -\frac{16}{EI}$$

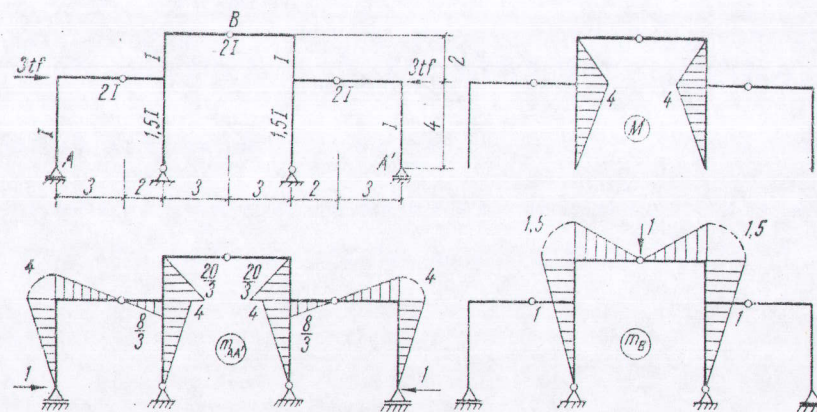


Fig. XIII.18.

**Problema XIII.14.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{v_E}$  și  $\theta_E^{rel}$  la structura din figură XIII.19.

$$\Delta_{v_E} = \frac{2}{2EI} \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 9 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2 \cdot 2}{EI} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{2EI} 9 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\Delta_{v_E} = \frac{693}{16EI}$$

Adu



$$\theta_E^{rel} = -\frac{2}{2EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 - \frac{2 \cdot 2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{2EI} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1$$

$$\theta_E^{rel} = -\frac{60}{EI}$$

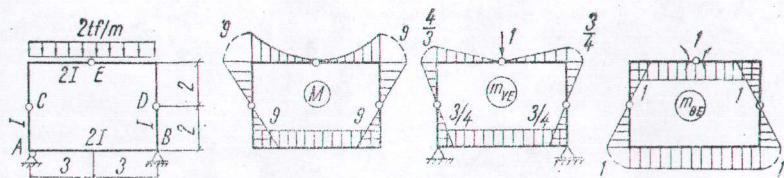


Fig. XIII.19.

**Problema XIII.15.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{u3}$  și  $\theta_{34}$  (tab. XIII.2) la structura din figură XIII.20, alcătuită din bare articulate. Barele au aceeași secțiune A.

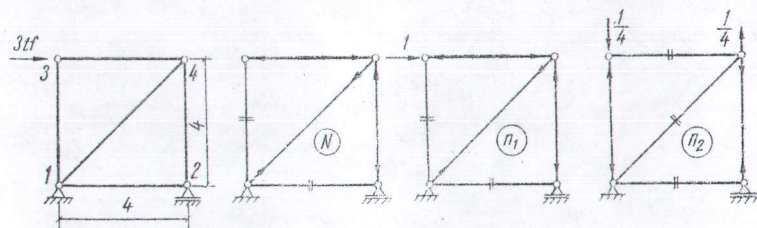


Fig. XIII.20.

În barele acestei structuri apar numai eforturi axiale, de aceea pentru calculul deplasărilor elastice cu relația Maxwell-Mohr se va păstra numai termenul corespunzător, adică:

$$\Delta_i = \int \frac{n_i N_j}{EA} dx.$$

Barele fiind de secțiune constantă, iar eforturile sînt constante pe fiecare bară, integrala se transformă într-o sumă de forma:

$$\Delta_i = \sum \frac{n_i N_j l_{km}}{EA},$$

deoarece:

$$\int_0^l dx = l_{km}.$$

Calculul se organizează într-un tablou pentru ușurința controlului și urmării succesiunii etapelor.

Pentru determinarea rotirii unei bare se introduce un cuplu de valoare 1, al cărui braț de pîrghie este tocmai lungimea barei respective. Solicitarea exterioară trebuie să acționeze și în acest caz numai în noduri, de aceea se introduce un cuplu unitar.

Tabelul XIII.2

Bara	$l$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$N$ [t]	$n_1$	$n_2$	$\frac{Nn_1 l}{EA}$	$\frac{Nn_2 l}{EA}$
1-2	4	A	0	0	0	0	0
1-3	4	A	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	0
1-4	$4\sqrt{2}$	A	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\frac{24\sqrt{2}}{EA}$	0
2-4	4	A	-3	-1	$+\frac{1}{4}$	$\frac{12}{EA}$	$\frac{-3}{EA}$
3-4	4	A	-3	-1	0	$\frac{12}{EA}$	0

$$\Delta_{u3} = \frac{24(1+\sqrt{2})}{EA}$$

$$\Sigma = \frac{24(1+\sqrt{2})}{EA} \quad \Sigma = \frac{-3}{EA}$$

$$\theta_{34} = -\frac{3}{EA}$$

**Problema XIII.16.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{u4}$  și  $\theta_{23}$  (tab. XIII.3) la grinda cu zăbrele din figura XIII.21.

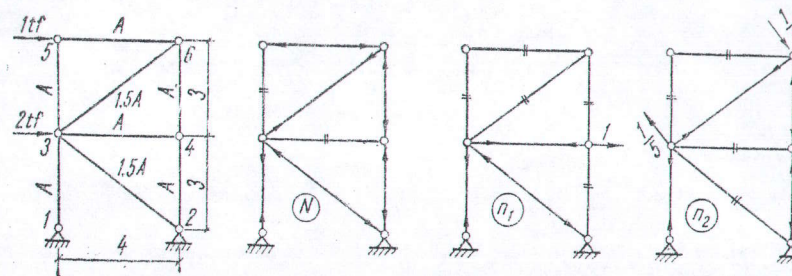


Fig. XIII.21.



Tabelul XIII.3

Bara	$l$ [m]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$N$ [T]	$n_1$	$n_2$	$\frac{Nn_1l}{EA}$	$\frac{Nn_2l}{EA}$
1-3	3	$A$	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{4EA}$	$\frac{9}{4EA}$
2-3	5	$1,5A$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{375}{24EA}$	0
2-4	3	$A$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{16EA}$
3-4	4	$A$	0	+1	0	0	0
3-5	3	$A$	0	0	0	0	0
3-6	5	$1,5A$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{20}$	0	$\frac{5}{8EA}$
4-6	3	$A$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{16EA}$
5-6	4	$A$	-1	0	0	0	0

$$\Delta_{u4} = \frac{179}{8EA}$$

$$\Sigma = \frac{179}{8EA} \quad \Sigma = \frac{4}{EA}$$

$$\theta_{23} = \frac{4}{EA}$$

**Problema XIII.17.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{v4}$  și  $\theta_{25}$  (tab. XIII.4) la grinda cu zăbrele din figura XIII.22.

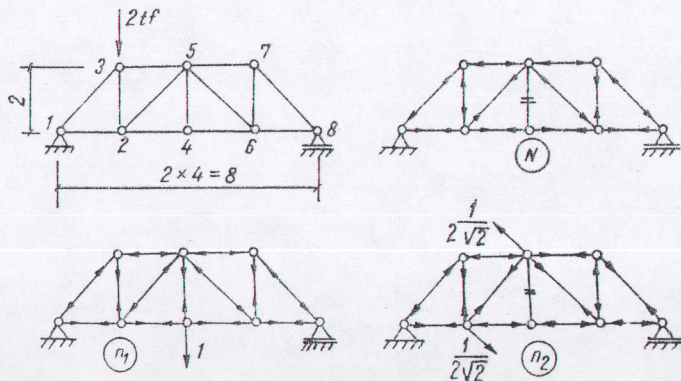


Fig. XIII.22.

Secțiunile barelor sînt:

- talpa superioară  $2A$ ;
- talpa inferioară  $1,5A$ ;
- diagonale și montanți  $A$ .

$$\Delta v_c = \frac{16+3\sqrt{2}}{3EA}; \quad \theta_{25} = \frac{1+6\sqrt{2}}{24EA}$$

**Problema XIII.18.** Să se determine deplasările elastice  $\theta_C^{rel}$  și  $\theta_A$  la structura din figura XIII.23, produse de variația de temperatură dată.

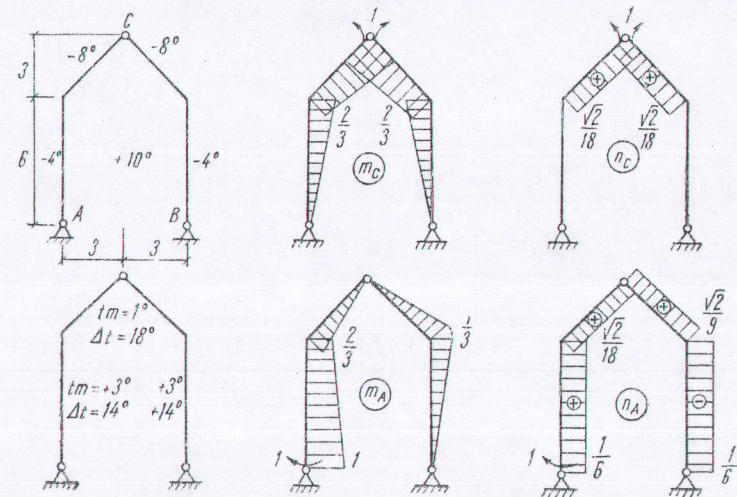


Fig. XIII.23.

Deplasările elastice în cazul solicitării exterioare — variație de temperatură — se determină cu relația:

$$\Delta_i = \int n_i \alpha t_m dx + \int m_i \alpha \frac{\Delta t}{h} dx.$$

Se dau:  $h_s = 0,4$  m  $h_r = 0,5$  m  $\alpha = 10^{-5}$ .

Remarcă:  $\alpha$ ,  $t_m$  și  $\Delta t$  sînt în acest caz constante și ies de sub semnul integrală, iar  $\int n_i dx$  și  $\int m_i dx$  reprezintă suprafața diagramei de efort axial, respectiv de moment pe fiecare bară.

$$\theta_c^{rel} = \alpha \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{14}{0,4} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{18}{0,5} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 \right]$$

$$\theta_c^{rel} = 3,95 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$



Tabelul XIII.4

Bara	$\frac{l}{[m]}$	$\frac{A}{[m^2]}$	$\frac{N}{[t]}$	$n_1$	$n_2$	$\frac{N_1 n_1 l}{EA}$	$\frac{N_2 n_2 l}{EA}$
1-2	2	1,5 A	1,5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{EA}$	$\frac{1}{4 EA}$
1-3	$2\sqrt{2}$	2 A	$-1,5\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{1,5\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{1,5\sqrt{2}}{4 EA}$
2-3	2	A	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2 EA}$	$-\frac{1}{8 EA}$
2-4	2	1,5 A	1	1	$+\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3 EA}$	$\frac{1}{3 EA}$
2-5	$2\sqrt{2}$	A	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{\sqrt{2}}{4 EA}$
3-5	2	2 A	-1,5	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4 EA}$	$\frac{3}{16 EA}$
4-5	2	A	0	1	0	0	0
4-6	2	1,5 A	1	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3 EA}$	$-\frac{1}{3 EA}$
5-6	$2\sqrt{2}$	A	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{EA}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4 EA}$
5-7	2	2 A	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4 EA}$	$-\frac{1}{16 EA}$
6-7	2	A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2 EA}$	$-\frac{1}{8 EA}$
6-8	2	1,5 A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3 EA}$	$-\frac{1}{12 EA}$
7-8	$2\sqrt{2}$	2 A	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2 EA}$	$-\frac{\sqrt{2}}{8 EA}$

$$\Sigma = \frac{16+3\sqrt{2}}{3 EA} = \frac{1+6\sqrt{2}}{24 EA}$$

$$\theta_A = \alpha \left[ \frac{2}{3} + 1 \cdot 6 \cdot \frac{14}{0,4} + \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{18}{0,5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{18}{0,5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{14}{0,4} + \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 + \frac{\sqrt{2}}{18} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 \right]$$

$$\theta_A = 1,826 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$$

Se atrage atenția asupra modului de stabilire a semnului fiecărui termen.

Pentru termenii de forma  $\int n_1 \alpha l_m dx$ , dacă efectul temperaturii medii  $l_m$  este de același sens cu efectul dat de sarcina unitate semnul este plus, în caz contrar semnul este minus.

Pentru termenii de forma  $\int m_i \alpha \frac{\Delta t}{h} dx$  se stabilește fibra tensionată atât de variația de temperatură cât și de momentul  $m_i$ . Dacă ambele efecte alungesc aceeași fibră semnul este plus, în caz contrar semnul este minus.

**Problema XIII.19.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{uB}$  și  $\theta_c^{\text{rel}}$  la structura din figura XIII.24, produse de variația de temperatură.

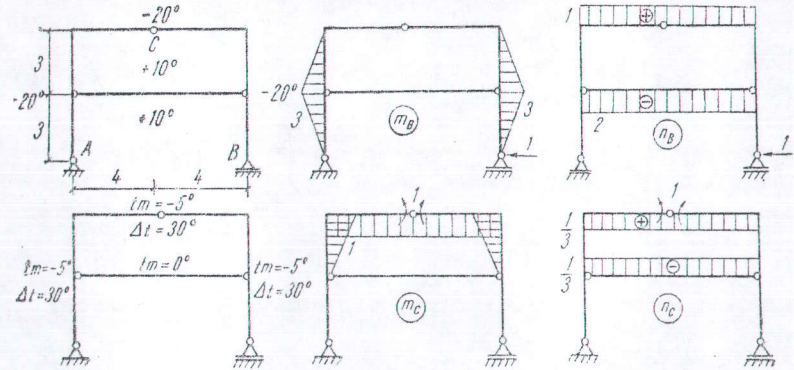


Fig. XIII.24.

$$(h_s = 0,5 \text{ m}, h_r = 0,75 \text{ m}).$$

$$\Delta_{uB} = \alpha \left[ -2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{30}{0,5} - 1 \cdot 8 \cdot 5 \right]$$

$$\Delta_{uB} = 1,120 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1,12 \text{ cm}$$

$$\theta_c^{\text{rel}} = \alpha \left[ 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{30}{0,75} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{30}{0,5} - \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 5 \right]$$

$$\theta_c^{\text{rel}} = 1,460 \cdot 10^{-2} \text{ rad.}$$

**Problema XIII.20.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{vD}$  și  $\theta_c$ , la structura din figura XIII.25, produse de cedările de reazem indicate ( $\varphi = 1^\circ$ ,  $\Delta_v = 2 \text{ cm}$ ).

Expresia deplasării elastice în acest caz este:

$$\Delta_i = -\sum r_{ki} \cdot \Delta_k.$$

Calculul se efectuează astfel: se determină reacțiunile  $r_{ki}$  produse de încărcarea unitate introdusă pe direcția  $i$  și apoi se scrie lucrul mecanic efectuat



de aceste reacțiuni, parcurgând cedările reazemelor respective. Lucrul mecanic total cu semn schimbat reprezintă valoarea deplasării  $\Delta_i$ .

$$\Delta_{vD} = - \left[ -\frac{1}{3} \cdot 0,02 - \frac{4}{9} \cdot 0,0174 \right]$$

$$\Delta_{vD} = 0,0144 \text{ m} = 1,44 \text{ cm.}$$

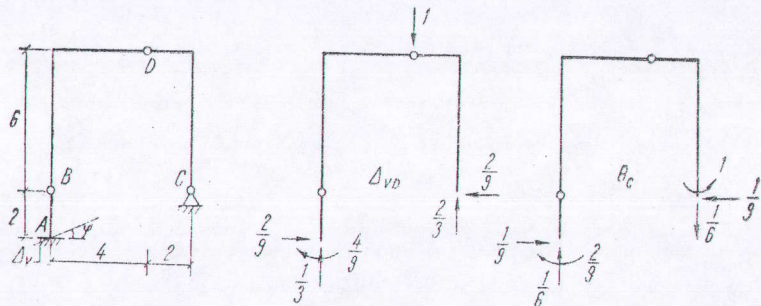


Fig. XIII.25.

Rotirea  $\varphi$  s-a transformat în radiani:  $1^\circ = 0,0174 \text{ rad.}$

$$\theta_C = - \left[ -\frac{1}{6} \cdot 0,02 - \frac{2}{9} \cdot 0,0174 \right] = 0,0072 \text{ rad} = 0,41^\circ.$$

**Problema XIII.21.** Să se determine deplasările elastice  $\Delta_{vA}$  și  $\Delta_{vB}$  la structura din figura XIII.26, produse de cedarea reazemului C. ( $\Delta_u = 3 \text{ cm}$ ,  $\Delta_v = 1 \text{ cm}$ )

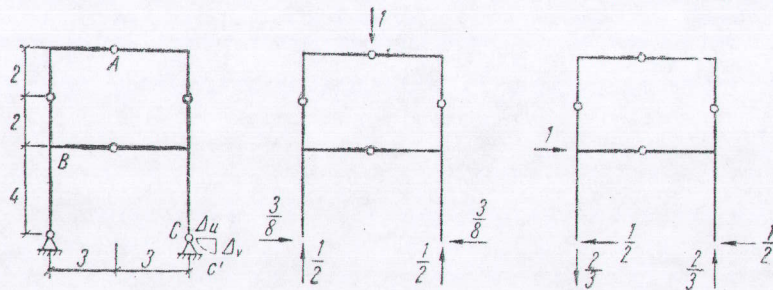


Fig. XIII.26.

$$\Delta_i = - \sum r_{ki} \cdot \Delta_k$$

$$\Delta_{vA} = - \left[ -\frac{3}{8} \cdot 0,03 - \frac{1}{2} \cdot 0,01 \right] = 0,016 \text{ m} = 1,6 \text{ cm}$$

$$\Delta_{vB} = - \left[ -\frac{1}{2} \cdot 0,03 - \frac{2}{3} \cdot 0,01 \right] = 0,0166 \text{ m} = 1,66 \text{ cm.}$$

**Problema XIII.22.** Să se determine deplasarea elastică  $\Delta_{vC}$  la arcul parabolic din figură. Secțiunea arcului este variabilă  $I_x = \frac{I_c}{\cos \varphi}$ , unde  $I_c$  este momentul de inerție al secțiunii de la cheia.

Pentru calculul deplasării elastice se reține numai termenul  $\int \frac{m_i M_j}{EI} ds$ .

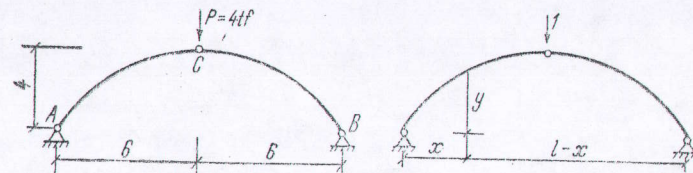


Fig. XIII.27.

Calculul momentelor se face pe porțiuni.

Arcul fiind simetric și încărcat simetric — atât din încărcarea cu forța  $P$  cât și cu sarcina unitate — integrarea se face numai pe jumătate de arc, dar multiplicând cu 2.

Din încărcarea cu sarcina  $P$  se obține:

$$M_{AC} = V_A \cdot x - H_A \cdot y \quad H_A = 3 \text{ t}$$

$$V_A = 2 \text{ t} \quad M_{AC} = 2x - 3y.$$

Din încărcarea cu forța 1 verticală aplicată în C se obține:

$$m_{AC} = V'_A \cdot x - H'_A \cdot y \quad H'_A = \frac{3}{4}$$

$$V'_A = \frac{1}{2} \quad m_{AC} = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} y$$

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_j}{EI_x} ds \quad \text{dar, } ds \cos \varphi = dx \text{ și } I_c = I_x \cos \varphi$$

$$\Delta_{vC} = 2 \frac{1}{EI_c} \int_0^{\frac{l}{2}} m_{AC} M_{AC} dx = \frac{2}{EI_c} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{x}{2} - \frac{3}{4} y \right) (2x - 3y) dx.$$

Produsul de sub semnul integrală, unde  $y$  se înlocuiește cu relația  $y = \frac{4}{l^2} x(l-x)$ , are expresia:

$$\left( \frac{x}{2} - \frac{3}{4} y \right) (2x - 3y) = x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{36}$$

$$\Delta_{vC} = \frac{2}{EI_c} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{36} \right) dx = \frac{2}{EI_c} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{180} \right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$\Delta_{vC} = \frac{14,4}{EI_c}$$

Produsul  $EI_c$  trebuie luat în tfm<sup>2</sup>, iar  $\Delta_{vC}$  rezultă în m.



**Problema XIII.23.** Să se determine  $\Delta_{vc}$  la arcul de la problema XIII.22, însă arcul este solicitat de o sarcină uniform distribuită pe orizontală, pe jumătatea din stînga (fig. XIII.28).

— Reacțiunile:

$$V_A = 4,5 \text{ tf}$$

$$H_A = 2,25 \text{ tf}$$

$$V_B = 1,5 \text{ tf}$$

$$H_B = 2,25 \text{ tf.}$$

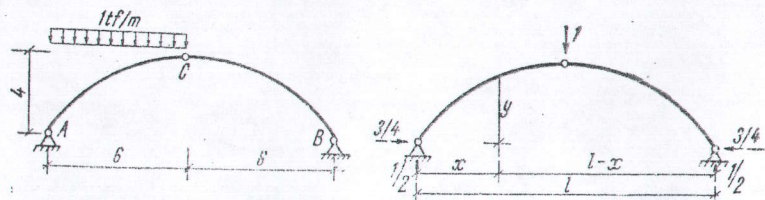


Fig. XIII.28.

— Calculul momentelor.

Din încărcarea cu sarcina uniform distribuită:

$$M_{AC} = V_A \cdot x - \frac{fx^2}{2} - H_A \cdot y; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$M_{BC} = V_B(l-x) - H_B \cdot y; \quad l \geq x \geq \frac{l}{2}$$

$$M_{AC} = 4,5x - \frac{x^2}{2} - 2,25y.$$

$$M_{BC} = 1,5(12-x) - 2,25y.$$

Din încărcarea cu sarcina unitate aplicată în C:

$$V'_A = \frac{1}{2} \text{ tf}; \quad H'_A = \frac{3}{4} \text{ tf};$$

$$V'_B = \frac{1}{2} \text{ tf}; \quad H'_B = \frac{3}{4} \text{ tf};$$

$$m_{AC} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y; \quad m_{BC} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y.$$

$$\Delta_i = \int \frac{m_i M_j}{EI} ds$$

$$\Delta_{vc} = \frac{1}{EI_c} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(4,5x - \frac{x^2}{2} - 2,25y\right) \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{EI_c} \int_{\frac{l}{2}}^l (18 - 1,5x - 2,25y) \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right) dx$$

$$\Delta_{vc} = \frac{1}{48EI_c} \int_0^{\frac{l}{2}} (-36x^2 + 8x^3 - x^4) dx + \frac{1}{48EI_c} \int_{\frac{l}{2}}^l (-432x + 180x^2 - 24x^3 + x^4) dx$$

$$\Delta_{vc} = \frac{1}{48EI_c} \left[ -\frac{36x^3}{3} + \frac{8x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\frac{l}{2}} + \frac{1}{48EI_c} \left[ -\frac{432x^2}{2} + \frac{180x^3}{3} - \frac{24x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_{\frac{l}{2}}^l$$

$$\Delta_{vc} = -\frac{32,4}{EI_c} + \frac{21,6}{EI_c} = -\frac{10,8}{EI_c}.$$

Deplasarea se produce în sens invers sensului de acțiune a sarcinii unitate.

**Problema XIII.24.** Pentru arcul de la problema XIII.23 să se determine rotirea relativă  $\theta_c^{\text{rel}}$ .  $I_c = I_x \cos \varphi$  (fig. XIII.29).

Calculul momentelor.

Din încărcarea cu sarcina uniform distribuită, expresiile momentului pe cele două intervale AB și BC sînt calculate la aplicația precedentă.

Din încărcarea cu perechea de momente aplicate în C rezultă:

$$V'_A = V'_B = 0$$

$$H'_A = H'_B = \frac{1}{f} = \frac{1}{4} \quad \text{-- Sensul reacțiunilor orizontale este indicat în figură.}$$

$$m_{AC} = \frac{1}{4}y; \quad m_{BC} = \frac{1}{4}y.$$

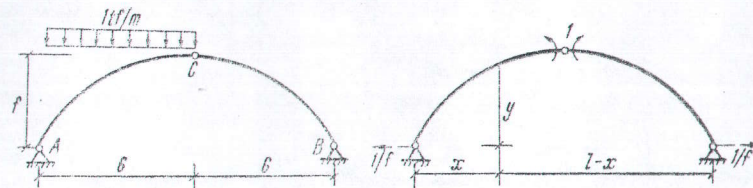


Fig. XIII.29.

$$\theta_c^{\text{rel}} = \frac{1}{EI_c} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(4,5x - \frac{x^2}{2} - 2,25y\right) \frac{1}{4}y dx + \frac{1}{EI_c} \int_{\frac{l}{2}}^l (18 - 1,5x - 2,25y) \frac{1}{4}y dx.$$

$$\theta_c^{\text{rel}} = \frac{1}{EI_c} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{144} (192x - 160x^2 + 24x^3 - x^4) dx +$$

$$+ \frac{1}{EI_c} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{1}{144} (864x - 288x^2 + 30x^3 - x^4) dx$$



$$\theta_c^{\text{rel}} = \frac{1}{144 EI_c} \left[ 192 \frac{x^2}{2} - 160 \frac{x^3}{3} + 24 \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^6 + \frac{c_1}{144 EI_c} \left[ 864 \frac{x^2}{2} - 228 \frac{x^3}{3} + 30 \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^{12}$$

$$\theta_c^{\text{rel}} = -\frac{12,8}{EI_c} + \frac{6,3}{EI_c} = -\frac{6,5}{EI_c}$$

### C. Calculul deplasărilor elastice cu ajutorul sarcinilor elastice. Linia elastică

Utilizând expresia deplasării elastice dată de relația Maxwell-Mohr, se obține deplasarea unui punct pe o direcție oarecare. În unele cazuri este necesar să se stabilească poziția deformată a structurii, sau, așa cum se denumește în mod obișnuit, linia elastică a structurii. Rezultă că pentru a rezolva această problemă trebuie ca relația Maxwell-Mohr să fie aplicată pentru un număr infinit de puncte sau, practic, într-un număr mare de puncte, ceea ce reclamă un volum important de calcul.

Această situație poate fi evitată utilizând metoda sarcinilor elastice la determinarea liniei elastice.

Ideea metodei sarcinii elastice pornește de la constatarea că poziția deformată a unei structuri raportată la o direcție dată are alura unei diagrame de moment.

În figura XIII.30, în care s-a considerat o porțiune  $ab$  dintr-o structură, se observă asemănarea între diagrama deplasărilor elastice pe o direcție oarecare  $\Delta$ , și o diagramă de momente încovoietoare, produse de un sistem de sarcini exterioare acționând asupra barei  $a_1b_1$ .

O dată stabilită această asemănare pentru rezolvarea problemei trebuie lămurite două aspecte:

— care sînt sarcinile care aplicate pe bara  $a_1b_1$  pot produce o diagramă de momente, la care în orice secțiune, valoarea momentului să reprezinte săgeata (deplasarea elastică) structurii reale  $ab$ ;

— care sînt reazemele sau forțele de legătură ale barei  $a_1b_1$  și care este corespondența dintre ele și legăturile barei reale.

În literatura de specialitate, structura care satisface condițiile de mai sus se numește conjugată structurii reale sau structura fictivă.

Evident, forțele exterioare, forțele de legătură și eforturile se numesc forțe fictive și eforturi fictive.

Din rezistența materialelor se știe că rotirea relativă între două secțiuni vecine este dată de relația:

$$d\Phi = \frac{M dx}{EI}, \quad (\text{XIII.22})$$

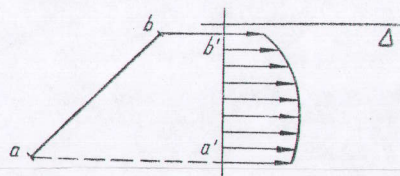


Fig. XIII.30.

unde  $M dx$  este suprafața diagramei de moment pe lungimea  $dx$  a barei considerate, iar rotirea relativă între două secțiuni  $a$  și  $b$  este:

$$\Phi = \int_a^b \frac{M dx}{EI} \quad (\text{XIII.22'})$$

unde  $\int_a^b M dx$  este suprafața de moment cuprinsă între secțiunile  $a$  și  $b$ .

Rezultă din cele de mai sus că dacă o bară va fi încărcată cu sarcina concentrată  $\frac{M dx}{EI}$  în secțiunea de abscisă  $x$ , rotirea relativă între cele două porțiuni de bară este tocmai  $d\Phi$ .

Apare evident că pentru încărcarea cu forțe concentrate  $\frac{M dx}{EI}$  în toate punctele barei rotirea unei secțiuni va fi integrală din această expresie pe întregul interval.

Sarcina  $\frac{M dx}{EI}$ , notată cu  $w_i$ , este sarcina fictivă și este egală cu suprafața diagramei de moment pe intervalul  $dx$  al barei reale împărțită la rigiditatea barei.

În practică se lucrează cu sarcina elastică  $W = EI w_i$ , așa încît într-un punct sarcina fictivă  $W = M$ . Evident, toate rezultatele obținute vor fi de  $EI$  ori mai mari, fapt de care trebuie să se țină seama în calcul.

Se consideră o grindă încărcată oarecum și care are diagrama de moment încovoietor  $M$  (fig. XIII.31,  $a$  și  $b$ ).

Deformata grinzii este arătată în figura XIII.31,  $c$ .

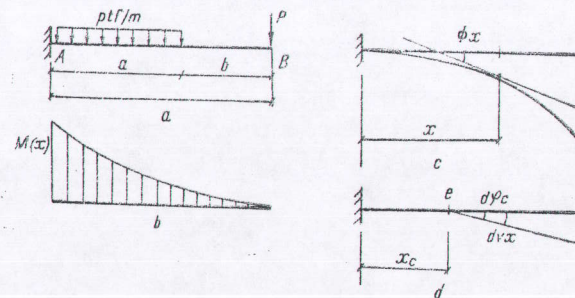


Fig. XIII.31.

Într-o secțiune  $x$ , rotirea  $\Phi_x$  este egală cu suprafața diagramei de moment pe intervalul  $Ax$ . Prin analogie cu grinda reală se poate afirma că rotirea  $\Phi_x$  este egală cu forța tăietoare  $T_f$  pe grinda fictivă încărcată cu sarcina fictivă  $M$ .



Săgeata  $v$  în secțiunea  $x$  se determină făcând următoarea observație: dacă pe grinda acționează o singură forță elastică  $w_c$  (în secțiunea  $C$ ), care produce rotirea  $d\Phi_c$ , iar la stînga și la dreapta secțiunii grinda nu se deformează, în secțiunea  $x$  apare săgeata (fig. XIII.31,  $d$ ):

$$dv_x = d\Phi_c(x - x_c). \quad (\text{XIII.23})$$

Încărcînd toate secțiunile cu sarcinile fictive  $w_i$ , săgeata totală în secțiunea  $x$  este:

$$v_x = \int_0^x (x - x_c) \cdot d\Phi_c = \int_0^x \frac{M}{EI} (x - x_c) dx. \quad (\text{XIII.24})$$

Notînd și aici ca la grinda reală  $\int M(x - x_c) dx = M^f$ , săgeata capătă expresia:

$$v_x = \frac{M^f}{EI} = \frac{T^f x_g}{EI}, \quad (\text{XIII.25})$$

unde  $T^f$  este suprafața de moment încovoietor  $M$  de la stînga secțiunii  $x$ , iar  $x_g$  este distanța de la centrul de greutate al acestei suprafețe la secțiunea  $x$ .

În concluzie, săgeata într-o secțiune a grinzii reale este egală cu valoarea momentului  $M^f$  din această secțiune, obținut din încărcarea grinzii conjugate cu diagrama de moment  $M$  ca sarcină exterioară.\*

Astfel, prima problemă pusă la începutul acestui paragraf a fost rezolvată, adică s-a stabilit legătura între deformațiile elastice ale barei și sarcina elastică\*\*.

În ceea ce privește corespondența dintre reazemele grinzii reale și reazemele grinzii conjugate, aceasta rezultă din analiza expresiilor:

$$\Phi_x = \frac{T^f}{EI} \text{ și } v_x = \frac{M^f}{EI} \quad (\text{XIII.26})$$

și este prezentată în tabelul XIII.5.

Pentru exemplificare se aleg cîteva cazuri curente (fig. XIII.32).

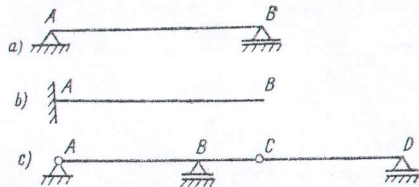


Fig. XIII.32.

\* De asemenea se poate spune că săgeata într-o secțiune a grinzii reale este egală cu momentul static al suprafeței diagramei  $M$  în raport cu secțiunea dată împărțită la  $EI$ .

\*\* În lucrarea [13] se poate urmări calculul dezvoltat al sistemelor elastice de bare cu ajutorul sistemelor conjugate.

Tabelul XIII.5

Corespondența între reazemele curente ale grinzilor reale și reazemele grinzilor conjugate

Grinda reală		Grinda conjugată		
Rezemare	$\begin{matrix} M \\ T \end{matrix}$	$\begin{matrix} v \\ \Phi \end{matrix}$	Rezemare	
	$\begin{matrix} M^f \\ T^f \end{matrix}$			
	$\begin{matrix} M=0 \\ T \neq 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} v=0 \\ \Phi \neq 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} M^f=0 \\ T^f \neq 0 \end{matrix}$	
	$\begin{matrix} M \neq 0 \\ T \neq 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} v=0 \\ \Phi=0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} M^f=0 \\ T^f=0 \end{matrix}$	
	$\begin{matrix} M=0 \\ T=0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} v \neq 0 \\ \Phi \neq 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} M^f \neq 0 \\ T^f \neq 0 \end{matrix}$	
	$\begin{matrix} M=0 \\ T \neq 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} v \neq 0 \\ \Phi \neq 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} M^f \neq 0 \\ T^f \neq 0 \end{matrix}$	
	$\begin{matrix} M \neq 0 \\ T \neq 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} v=0 \\ \Phi \neq 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} M^f=0 \\ T^f \neq 0 \end{matrix}$	

Grinda simplu rezemată din figura XIII.32,  $a$  are în  $A$  și  $B$  săgeata egală cu zero ( $v=0$ ) și rotirea diferită de zero ( $\Phi \neq 0$ ).

Grinda conjugată va trebui să aibă în punctele  $A$  și  $B$  momentul  $M^f=0$  și  $T^f \neq 0$ , și în consecință în aceste puncte se introduc reazeme simple.

Grinda în consolă din figura XIII.32,  $b$  în încastrarea  $A$  are  $v_A=0$  și  $\Phi_A=0$ . Grinda conjugată va avea capăt liber în  $A$  și încastrarea în  $B$ .

Grinda Gerber din figura XIII.32,  $c$  în  $A$  și  $D$  prezintă aceleași condiții ca și grinda simplu rezemată din figura XIII.31,  $a$ .

În reazemul intermediar  $B$ ,  $v_B=0$  și  $\Phi_B \neq 0$ , deci grinda conjugată, în  $B$  va avea  $M^f=0$  și  $T^f \neq 0$ , ceea ce corespunde unei articulații interioare.

În articulația interioară  $C$ ,  $v_C \neq 0$  și  $\Phi_C \neq 0$ , ceea ce corespunde pe grinda conjugată unui reazem intermediar, în care  $M^f \neq 0$  și  $T^f \neq 0$ .

Calculul practic se conduce astfel:

- se determină diagrama de moment încovoietor  $M$  pe grinda reală;
- se stabilește grinda conjugată și se introduc reazemele corespunzătoare;
- se încarcă grinda conjugată cu diagrama  $M$  răsturnată ca sarcină exterioară;

— se trasează diagramele  $T^f$  și  $M^f$ . Valoarea  $T_x^f$  și  $M_x^f$  reprezintă rotirea și respectiv săgeata grinzii reale în secțiunea  $x$ . Valoarea exactă a rotirii și săgeții se obține prin împărțirea cu  $EI$  a valorilor calculate, așa cum s-a arătat mai sus.



## APLICAȚII

**Problema XIII.25.** Să se traseze linia elastică la grinda din figura XIII.33 și să se determine  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$  și  $v_{l/2}$

Rotirea în A:

$$\Phi'_A = T'_A; T'_A = V'_A; V'_A = 12; \Phi'_A = 12; \Phi_A = \frac{12}{EI}$$

$$V'_A \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 0.$$

Rotirea în B:

$$\Phi'_B = T'_B; T'_B = -V'_B; V'_B = 15; \Phi'_B = 15; \Phi_B = -\frac{15}{EI}$$

$$V'_B \cdot 9 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 7 = 0.$$

Săgeata la  $\frac{l}{2}$ :

$$v'_1 = \frac{M'_1}{\frac{l}{2}}$$

$$M'_1 = 4,5 \cdot V'_A - \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4,5 = 38,813$$

$$v'_1 = 38,813; v_{l/2} = \frac{38,813}{EI}$$

Se observă că  $\Phi'_A$  este de  $EI$  ori mai mare decât  $\Phi_A$  și de aceea s-a împărțit prin  $EI$ , pentru a se determina valoarea reală a rotirii. Același lucru este valabil și pentru celelalte deplasări.

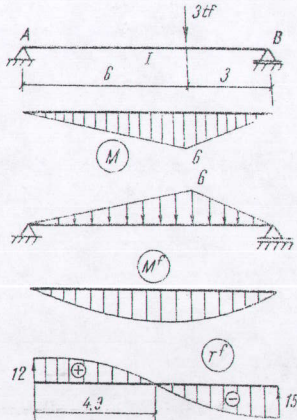


Fig. XIII.33.

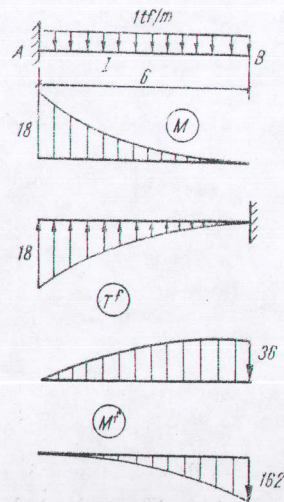


Fig. XIII.34.

**Problema XIII.26.** Să se traseze linia elastică la grinda din figura XIII.34 și să se determine  $\Phi_B$  și  $v_B$ .

$$V_A = 6 \text{ tf}; M_A = 18 \text{ tfm}$$

Rotirea în B:

$$\Phi'_B = T'_B$$

$$T'_B = V'_B; V'_B = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36; \Phi'_B = 36; \Phi_B = \frac{36}{EI}$$

Săgeata în B:

$$v'_B = M'_B$$

$$M'_B = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 = 162$$

$$v'_B = 162; v_B = \frac{162}{EI}$$

**Problema XIII.27.** Să se determine  $\Phi_C$  și  $v_C$  și să se traseze linia elastică la grinda din figura XIII.35.

Rotirea în C:  $\Phi'_C = T'_C$ .

Trebuie determinate mai întâi  $V'_B$  și apoi  $V'_C$ :

$$V'_B \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 = 0; V'_B = 16$$

$$V'_C = 16 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 22$$

$$\Phi'_C = 22; \Phi_C = \frac{22}{EI}$$

$$v'_C = M'_C$$

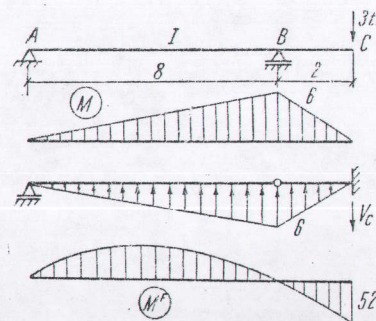


Fig. XIII.35.

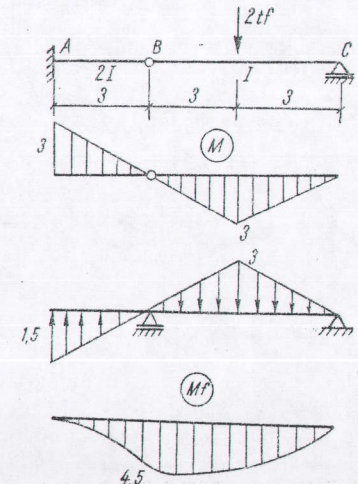


Fig. XIII.36.



$$M'_C = V'_B \cdot 2 + \frac{1}{1} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 40$$

$$v'_c = 40; \quad v_C = \frac{v'_c}{EI} = \frac{40}{EI}$$

**Problema XIII.28.** Să se determine  $\Phi_C$ ,  $\Phi_B$  și  $v_B$  și să se traseze linia elastică la grinda Gerber din figura XIII.36.

În acest caz, la încărcarea grinzii fictive cu diagrama  $M$ , ca sarcină exterioară trebuie să se țină seama de faptul că panoul  $AB$  are momentul de inerție  $2I$ , deci sarcina pe acesta este  $\frac{M}{2}$ .

Săgeata în  $B$ :

$$v'_B = M'_B, \quad M'_B = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 4,5; \quad v'_B = 4,5; \quad v_B = \frac{4,5}{EI}$$

Rotirea relativă în  $B$ :

$$\Phi'_B = T'_{sl} + T'_{dr} = V'_B; \quad V'_B \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad V'_B = 1,5$$

$$\Phi'_B = 1,5; \quad \Phi_B = \frac{1,5}{EI}$$

Rotirea în  $C$ :

$$\Phi'_C = T'_C; \quad V'_C = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 - 1,5; \quad V'_C = 5,25;$$

$$\Phi'_C = 5,25; \quad \Phi_C = \frac{5,25}{EI}$$

**Problema XIII.29.** Să se determine  $v_C$ ,  $\Phi_C$ ,  $u_B$  și  $\Phi_B$  la structura din figura XIII.37.

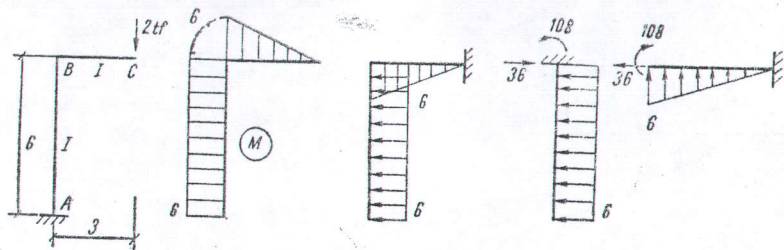


Fig. XIII.37.

Problema se rezolvă separat pentru deplasările pe orizontală și pe verticală.

Se consideră conjugata barei  $AB$ , care este o consolă cu încastrarea în  $B$ . Punctele acestei bare au numai deplasări pe orizontală.

Conjugata barei  $BC$  este tot o consolă cu încastrare în  $C$ , avînd ca încărcare momentul fictiv concentrat  $M'_B$ , forța axială  $T'_B$  (care este forță tăietoare în  $B$  pe bara  $AB$ ) și sarcina triunghiulară  $M$ . Toate punctele acestei bare au aceeași deplasare pe orizontală, egală cu deplasarea punctului  $B$ .

Deplasarea pe orizontală a punctului  $B$ :

$$u'_B = M'_B; \quad M'_B = 6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$$

$$u'_B = 108; \quad u_B = \frac{108}{EI}$$

Rotirea în punctul  $B$ :

$$\Phi'_B = T'_{Bsl}; \quad T'_{Bsl} = H'_B$$

$$H'_B = 6 \cdot 6 = 36; \quad \Phi'_B = 36; \quad \Phi_B = \frac{36}{EI}$$

Deplasarea pe verticală a punctului  $C$ :

$$v'_C = M'_C; \quad M'_C = 108 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 126; \quad v'_C = 126; \quad v_C = \frac{126}{EI}$$

Rotirea în punctul  $C$ :

$$\Phi'_C = \Phi'_B + T'_C; \quad T'_C = V'_C$$

$$V'_C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9; \quad \Phi'_C = 36 + 9 = 45; \quad \Phi_C = \frac{45}{EI}$$

D. Calculul deplasărilor elastice la sisteme alcătuite din bare cu secțiune variabilă

În proiectare se urmărește realizarea de construcții economice, prin utilizarea la maximum a proprietăților materialelor din care sînt alcătuite structurile de rezistență și prin adoptarea de elemente de rezistență la care distribuția materialului de-a lungul barelor urmărește variația eforturilor.

În practică se utilizează curent barele cu înălțime variabilă pe toată lungimea sau numai pe o anumită zonă.

La structurile din beton armat, variația secțiunii se introduce de obicei spre reazeme, zona respectivă numindu-se vută. Vutele sînt drepte sau parabolice și pot fi la unul sau la ambele capete, sau o variație continuă pe toată bara (fig. XIII.38, a, b, c, d, e).